Informatique Générale

Élements d'algèbre de Boole

Jacques Farré

Jacques.Farre@unice.fr

http://deptinfo.unice.fr/~jf/InfoGene

Calcul propositionnel

Calcul propositionnel : théorie ***logique*** qui définit les lois formelles du raisonnement

- évaluation d'expressions résultant en une valeur parmi {*faux*, *vrai*} (notées aussi {F, V} ou {0, 1})

Une proposition atomique est une affirmation susceptible d'être vraie ou fausse : *il pleut*, 2009 est une année bissextile, i+*j* = *k*, ...

On peut former une proposition en utilisant des ***opérateurs logiques*** (ou *connecteurs*), par exemple

Il pleut ET il y a de soleil

i+j=k OU (i-j=k ET k>0)

Le calcul de propositions est une structure algébrique que l'on appelle ***algèbre de Boole***.

Opérateurs logiques unaires

Les opérateurs sont définis par des ***tables de vérité***

4 (2^2) opérateurs unaires (u1-u4) ; tables de vérité :

A	u1	u2	u3	u4
faux	faux	faux	vrai	vrai
vrai	faux	vrai	faux	vrai

u1 est la *contradiction* : faux quelque soit A
u2 est l'identité : vaut A pour tout A
u3 est la négation, notée $\neg$

ou $\overline{A}$

A	$\neg$A
faux	vrai
vrai	faux

u4 est la tautologie (toujours vrai)

Opérateurs logiques binaires

16 (2^4) opérateurs binaires, parmi lesquels

A	B	ET ($\wedge$ ou .)	OU ($\vee$ ou .)	équivalence ($\equiv$ ou $\Leftrightarrow$)	implication ($\supset$ ou $\Rightarrow$)
F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F
V	V	V	V	V	V

A	B	NAND (non ET)	NOR (non OU)	XOR (OU exclusif)
F	F	V	V	F
F	V	V	F	V
V	F	V	F	V
V	V	F	F	F

Quelques propriétés

$A = \neg\neg A$

$A \vee \neg A = V$

$A \wedge \neg A = F$

$A \vee V = V$, $A \vee F = A$

$A \wedge V = A$, $A \wedge F = F$

Pouvez-vous les démontrez ?

Opérateurs logiques binaires (solution)

$A = \neg\neg A$:

$A = V \Rightarrow \neg A = F \Rightarrow \neg(\neg A) = V = A$

$A = F \Rightarrow \neg A = V \Rightarrow \neg(\neg A) = F = A$

$A \vee \neg A = V$:

$A = V \Rightarrow \neg A = F \Rightarrow A \vee \neg A = V \vee F = V$

$A = F \Rightarrow \neg A = V \Rightarrow A \vee \neg A = F \vee V = V$

$A \wedge \neg A = F$: preuve analogue, sachant que $V \wedge F = F \wedge V = F$

$A \vee V = V$: évident en regardant la table de $\vee$

$A \vee F = A$:

$A = V \Rightarrow V \vee F = V = A$

$A = F \Rightarrow F \vee F = F = A$

$A \wedge V = A$: évident en regardant la table de $\wedge$

$A \wedge F = F$: preuve analogue en regardant la table de $\wedge$

Système complets

Un ensemble d'opérateurs propositionnels est dit complet si tout autre opérateur peut se définir au moyen des connecteurs de l'ensemble

L'ensemble { $\neg$, $\wedge$, $\vee$ } est complet (il y en a d'autres)

par exemple : A XOR B = $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$

A	**B**	**¬A**	**¬B**	**¬A ∧ B**	**A ∧¬B**	**A XOR B**
F	**F**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**

Lois de Morgan (généralisables à N variables)

$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$

$\neg (A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$

Démonstration laissée à titre d'exercice

Formule statisfiable

Une formule $F(A_1, A_2 \dots A_n)$ est satisfiable s'il existe, pour chaque A_i, une valeur parmi {V, F} telle que F est vraie

Par exemple, $A \land B \land \neg C$ est satisfiable pour

A=V, B=V, C=F

En règle générale, essayer de simplifier l'expression, puis établir la table de vérité

Il existe d'autres méthodes (un peu) moins laborieuses que vous verrez plus tard (diagrammes de Karnaugh, méthode de Quine, méthode de Davis-Putnam ...)

Algèbre de Boole

On considère { ¬ , ∧, ∨ } (notés plutôt { ˜, . , +}) sur { 0, 1 }

par convention on écrit **a+b au lieu de a ∨ b,**
a.b pour a ∧ b,
ã pour ¬ a

Associativité et commutativité de + et de .

(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c (idem avec .)
a+b = b+a (idem avec .)

Distributivité : a.(b+c) = a.b + a.c

Idempotence : a+a+...+a = a (idem avec .)

Élément neutre : a+0 = a, a.1 = a
a+1 = 1, a.0 = 0

Et donc, parmi d'autres propriétés :

a + a.b = a, a.(a+b) = a
(a+b).(a+c) = a + bc
a + ã.b = a + b a.(ã + b) = a.b

Sauriez vous le montrer ?

Algèbre de Boole
(solutions de l'exercice précédent)

On peut utiliser des tables de vérité, mais aussi procéder plus algébriquement :

$a + a.b = a.1 + a.b = a.(1+b) = a.1 = a$

on utilise

on utilise

$a.(a+b) = a.a + a.b = a + a.b = a$

$(a+b).(a+c) = a.a + a.c + b.a + b.c = a + a.(b+c) + b.c$

$\qquad = a + b.c$

on utilise

$a + \tilde{a}.b = (a+\tilde{a}).(a+b) = 1.(a+b) = a+b$

$a.(\tilde{a} + b) = a.\tilde{a} + a.b = 0 + a.b = a.b$