Chapitre 6

Introduction à la programmation linéaire

6.1 Introduction

6.1.1 Un exemple de problème de régime alimentaire

Marie se demande comment gérer au mieux ses dépenses alimentaires tout en respectant ses besoins quotidiens en énergie (2000 kcal), protéines (55g) et calcium (800 mg). Elle sélectionne six produits qui semblent être des sources nutritionnelles bon marché (voir Table 6.1).

Aliment	Quantité	Énergie (kcal)	Protéines (g)	Calcium (mg)	Prix (centimes)
Céréales	28 g	110	4	2	3
Poulet	100 g	205	32	12	24
Oeufs	2	160	13	54	13
Lait entier	25 cl	160	8	285	9
Tarte aux pommes	170 g	420	4	22	20
Porc et haricots	260 g	260	14	80	19

TAB. 6.1 – Apports nutritionnels par repas

Maintenant, Marie se demande comment composer ses menus. Par exemple, 10 services du plat de porc/haricots pourrait satisfaire tous ses besoins pour seulement 1,90 € par jour. Cependant, son estomac ne pourrait supporter que deux services seulement. Elle décide donc d'imposer les limites suivantes sur le nombre de services par jour pour chacun des aliments :

Céréales	au plus 4 services par jour,
Poulet	au plus 3 services par jour,
Oeufs	au plus 2 services par jour,
Lait entier	au plus 8 services par jour,
Tarte aux pommes	au plus 2 services par jour,
Porc et haricots	au plus 2 services par jour.

En regardant à nouveau les données, Marie observe que 8 services de lait et 2 services de tartes chaque jour satisferaient ses besoins pour un coût de seulement 1,12 €. En fait, elle pourrait diminuer un peu la quantité de tarte ou de lait ou essayer une autre combinaison. Le problème est qu'il y a un grand nombre de combinaisons et que la méthode consistant à les énumérer toutes risque d'être un peu longue.

Nous proposons de formaliser ce problème comme celui de la recherche d'un menu composé de x_1 services de céréales, x_2 services de poulet, x_3 services d'œufs, etc. Afin de respecter les limites imposées, le menu doit satisfaire :

$$
\begin{array}{rcl}
0 \leq x_1 & \leq & 4 \\
0 \leq x_2 & \leq & 3 \\
0 \leq x_3 & \leq & 2 \\
0 \leq x_4 & \leq & 8 \\
0 \leq x_5 & \leq & 2 \\
0 \leq x_6 & \leq & 2.
\end{array}
\tag{6.1}
$$

Le menu doit satisfaire aussi les contraintes sur les besoins en énergie, protéines et calcium :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
110x_1 & + & 205x_2 & + & 160x_3 & + & 160x_4 & + & 420x_5 & + & 260x_6 & \geq & 2000 \\
4x_1 & + & 32x_2 & + & 13x_3 & + & 8x_4 & + & 4x_5 & + & 14x_6 & \geq & 55 \\
2x_1 & + & 12x_2 & + & 54x_3 & + & 285x_4 & + & 22x_5 & + & 80x_6 & \geq & 800.
\end{array}
\tag{6.2}
$$

Si on peut trouver des valeurs de $x_1, x_2, \cdots, x_6$ qui satisfont les inégalités (6.1) et (6.2) alors le coût (en centimes) quotidien du menu correspondant est :

$$
3x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6. \tag{6.3}
$$

Pour composer le menu le moins cher, Marie cherche les valeurs de $x_1, x_2, \cdots, x_6$ qui satisfont les inégalités (6.1) et (6.2) et qui rendent la valeur (6.3) aussi petite que possible. La formulation mathématique de ce problème de régime est donc :

$$
\begin{array}{l}
\text{Minimiser} \quad 3x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6 \\
\\
\text{Sous les contraintes :} \\
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
 & & & & 0 \leq x_1 & \leq & 4 & & & & & & \\
 & & & & 0 \leq x_2 & \leq & 3 & & & & & & \\
 & & & & 0 \leq x_3 & \leq & 2 & & & & & & \\
 & & & & 0 \leq x_4 & \leq & 8 & & & & & & \\
 & & & & 0 \leq x_5 & \leq & 2 & & & & & & \\
 & & & & 0 \leq x_6 & \leq & 2 & & & & & & \\
110x_1 & + & 205x_2 & + & 160x_3 & + & 160x_4 & + & 420x_5 & + & 260x_6 & \geq & 2000 \\
4x_1 & + & 32x_2 & + & 13x_3 & + & 8x_4 & + & 4x_5 & + & 14x_6 & \geq & 55 \\
2x_1 & + & 12x_2 & + & 54x_3 & + & 285x_4 & + & 22x_5 & + & 80x_6 & \geq & 800.
\end{array}
\end{array}
\tag{6.4}
$$

6.1.2 Les programmes linéaires

Les problèmes comme celui du régime sont appelés problèmes de programmation linéaire ou PL. La programmation linéaire est la branche des mathématiques appliquées qui traite ces problème. Voici un autre exemple de PL :

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{Maximiser} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & & & \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 11 \\
 & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
\tag{6.5}
$$

(On note ici que "$x_1, x_2, x_3 \geq 0$" est un raccourci pour "$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$").

Un autre problème pourrait être :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{Minimiser} & 3x_1 & - & x_2 & & & & & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & & & & & \\
& -x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \geq & -3 \\
& & & 7x_2 & & & + & 2x_4 & = & 5 \\
& x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\
& & & & & x_3 & + & x_4 & \leq & 2 \\
& & & & & & & x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
\qquad (6.6)
$$

De manière générale, si $c_1, c_2, \cdots, c_n$ sont des nombres réels, alors la fonction f définie sur les variables réelles $x_1, x_2, \cdots, x_n$ par :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

est appelée une *fonction linéaire*. Notons que dans l'écriture de f il n'y a pas de produit de variables (comme x_1x_2) ou de constante isolée. Si f est une fonction linéaire et si b est un nombre réel, alors l'équation

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = b$$

est appelée *équation linéaire* et les inégalités

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq b$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geq b$$

sont appelées des *inéquations linéaires*. Les équations et les inéquations linéaires sont appelées ici des contraintes linéaires. Finalement, un *programme linéaire* est un problème qui consiste à maximiser ou minimiser une fonction linéaire tout en respectant un ensemble fini de contraintes linéaires. En général, nous utiliserons les indices i pour les contraintes et les indices j pour les variables.

La fonction linéaire que l'on doit maximiser ou minimiser dans un problème PL est dite *fonction objectif* du problème. Par exemple la fonction z des variables $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ définie par

$$z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 3x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6$$

est la fonction objectif du problème de régime de Marie (6.4).

Les nombres $x_1, x_2, \cdots, x_n$ qui satisfont toutes les contraintes d'un problème PL donné constituent une *solution réalisable* de ce problème. Par exemple nous avons vu que

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 8, x_5 = 2, x_6 = 0$$

est une solution réalisable de (6.4). Enfin, une solution réalisable qui maximise la fonction objectif d'un problème PL (sous la forme standard) est appelée *solution optimale*. La valeur de z associée est appelée *valeur optimale* du problème. Par exemple

$$x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 9/2, x_5 = 2, x_6 = 0$$

est la solution optimale de (6.4). Ainsi la valeur optimale correspondante est 92.5. Attention, tous les problèmes PL n'admettent pas une solution optimale unique ; certains problèmes peuvent avoir de nombreuses solutions optimales alors que d'autres peuvent n'en avoir aucune. Ce dernier cas peut se produire pour des raisons radicalement opposées : soit il n'existe pas de solution réalisable, soit, dans un certain sens, il en existe trop. On peut illustrer le premier cas sur le problème

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{Maximiser} & 3x_1 & - & x_2 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
& -2x_1 & - & 2x_2 & \leq & -10 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
\qquad (6.7)
$$

qui n'a pas de solution réalisable. Les problèmes de ce type sont dits *irréalisables*. D'un autre côté, même si le problème

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{Maximiser} & x_1 & - & x_2 & & \\ \text{Sous les contraintes :} & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -2 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \tag{6.8}$$

a des solutions réalisables, aucune d'entre elles n'est optimale. En effet, pour tout nombre M, il existe une solution réalisable x_1, x_2 telle que $x_1 - x_2 > M$. D'une certaine façon, (6.8) possède tellement de solutions qu'aucune d'entre elles ne peut prétendre être la meilleure. Les problèmes vérifiant cette propriété sont dits *non bornés*. Comme nous le prouverons plus tard, tout programme linéaire appartient à l'une de ces trois catégories : soit il admet une solution optimale, soit il n'est pas réalisable, soit il est non borné.

6.1.3 Mise sous forme standard

Nous allon voir que nous pouvons restreindre notre étude aux programmes linéaires de la forme :

$$\begin{array}{lrcll} \text{Maximiser} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \text{Sous les contraintes :} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ & x_j & \geq & 0 & (j = 1, 2, \cdots, n). \end{array} \tag{6.9}$$

De tels programmes linéaires sont dits sous *forme standard* ou *forme canonique*.

Pour illustrer nos propos, le programme (6.5) est mis sous forme standard avec $n = 3$, $m = 3$, $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, etc. Ce qui distingue des autres les problèmes mis sous cette forme est que les contraintes sont toutes des inéquations linéaires et aussi que les n variables de (6.9) sont obligatoirement positives (notons que (6.6) n'est pas un problème sous forme standard).

Il est facile de voir que tout programme linéaire a un programme linéaire équivalent sous forme standard. En effet, minimiser $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ est équivalent à maximiser $w = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j$. De même, l'inéquation $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$ est équivalente à $\sum_{j=1}^{n} -a_{ij} x_j \leq -b_i$.

6.2 Principes de la méthode du Simplexe

Dans ce chapitre nous allons apprendre comment résoudre par la méthode du Simplexe des problèmes linéaires écrits sous la forme standard. L'analyse rigoureuse de cette méthode est donnée dans la section (6.3).

6.2.1 Un premier exemple

Nous allons illustrer la méthode sur la résolution du PL suivant :

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{Maximiser} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & \\ \text{Sous les contraintes :} & & & & & & & \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 5 \\ & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 11 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array} \tag{6.10}$$

La première étape de la méthode consiste à introduire des variables dites *variables d'écart*. Afin de justifier cette démarche, nous examinons la première contrainte,

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5. \tag{6.11}$$

Pour toute solution réalisable x_1, x_2, x_3, la valeur de la partie gauche de (6.11) vaut au plus la valeur de la partie droite, mais souvent il pourra y avoir un écart entre les deux valeurs. Nous notons cet écart x_4. C'est à dire que nous définissons $x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$. Avec cette notation, l'inéquation (6.11) peut maintenant être écrite comme $x_4 \geq 0$. De la même façon nous introduisons les variables x_5 et x_6 pour les deux autres contraintes du PL (6.10). Enfin, nous utilisons la notation consacrée z pour la fonction objectif $5x_1 + 4x_2 + 3x_3$. En résumé : pour tout choix de x_1, x_2, x_3 nous définissons x_4, x_5, x_6 et z par les formules

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_4 & = & 5 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\ x_5 & = & 11 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\ x_6 & = & 8 & - & 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 \\ z & = & & & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3. \end{array} \tag{6.12}$$

Avec ces notations, le problème peut être réécrit comme :

$$\text{Maximiser } z \text{ sous les contraintes } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \tag{6.13}$$

Les nouvelles variables introduites sont appelées *variables d'écart* alors que les variables initiales sont habituellement appelées *variables de décision.* Il est important de noter que les équations de (6.12) définissent une équivalence entre (6.10) et (6.13). Plus précisément :

- Toute solution réalisable x_1, x_2, x_3 de (6.10) peut être étendue, de manière unique, par (6.12), en une solution réalisable $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ de (6.13).
- Toute solution réalisable $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ de (6.13) peut être réduite par simple suppression des variables d'écart en une solution réalisable x_1, x_2, x_3 de (6.10).
- Cette relation entre les solutions réalisables de (6.10) et les solutions réalisables de (6.13) permet de produire des solutions optimale de (6.10) à partir de solutions optimales de (6.13) et *vice versa.*

La stratégie du Simplexe consiste à trouver la solution optimale (si elle existe) par améliorations successives. Si on a trouvé x_1, x_2, x_3, une solution réalisable de (6.13), alors on va essayer de trouver une nouvelle solution $\bar{x_1}, \bar{x_2}, \bar{x_3}$ qui est meilleure au sens de l'objectif :

$$5\bar{x_1} + 4\bar{x_2} + 3\bar{x_3} \geq 5x_1 + 4x_2 + 3x_3.$$

En répétant ce processus un nombre fini de fois, nous obtiendrons finalement une solution optimale.

Pour démarrer, nous avons besoin d'une solution réalisable. Pour en trouver une dans notre exemple, il suffit de poser les variables de décision x_1, x_2, x_3 à zéro et d'évaluer les variables d'écart x_4, x_5, x_6 grâce à (6.12). Ainsi notre solution initiale,

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 5, x_5 = 11, x_6 = 8 \tag{6.14}$$

donne un résultat $z = 0$.

Dans l'esprit de la stratégie ébauchée ci-avant, nous devons maintenant chercher une nouvelle solution réalisable qui donne une plus grande valeur de z. Trouver une telle solution n'est pas difficile. Par exemple si on garde $x_2 = x_3 = 0$ et que l'on augmente la valeur de x_1, alors on obtient $z = 5x_1 \geq 0$. Ainsi, si on garde $x_2 = x_3 = 0$ et si on pose $x_1 = 1$ alors on obtient $z = 5$ (et $x_4 = 3, x_5 = 7, x_6 = 5$). Une meilleure solution est de garder $x_2 = x_3 = 0$ et de poser $x_1 = 2$; on obtient alors $z = 10$ (et $x_4 = 1, x_5 = 3, x_6 = 2$). Toutefois, si on garde $x_2 = x_3 = 0$ et si on pose $x_1 = 3$, alors $z = 15$ et $x_4 = x_5 = x_6 = -1$, ce qui viole la contrainte $x_i \geq 0$ pour tout i. La conclusion est que l'on ne peut pas augmenter x_1 d'autant que l'on veut. La question est donc : *de combien exactement peut-on augmenter x_1 (en gardant $x_2 = x_3 = 0$) tout en satisfaisant les contraintes ($x_4, x_5, x_6 \geq 0$) ?*

La condition $x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \geq 0$ implique $x_1 \leq \frac{5}{2}$. De la même façon, $x_5 \geq 0$ implique $x_1 \leq \frac{11}{4}$ et $x_6 \geq 0$ implique $x_1 \leq \frac{8}{3}$. De ces trois bornes, la première est la plus forte. Augmenter x_1 jusqu'à cette borne nous donne la solution de l'étape suivante :

$$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = \frac{1}{2} \tag{6.15}$$

qui donne un résultat de $z = \frac{25}{2}$ qui est en effet une amélioration sur $z = 0$. Par la suite nous devons chercher une solution réalisable qui est encore meilleure que (6.15). Cependant, cette tâche n'est pas aussi simple que précédemment. Pourquoi était-ce plus facile ? Et bien, non seulement on disposait de la solution réalisable de (6.14) mais aussi du système d'équations linéaires (6.12) qui nous a guidé dans notre quête d'une meilleure solution réalisable. Si l'on veut poursuivre dans cette voie, nous devons construire un nouveau système d'équations linéaires qui soit relié à (6.15) de la même façon que (6.12) l'est à (6.14).

Quelles propriétés doit avoir ce nouveau système ? Notons tout d'abord que (6.12) exprime les variables qui sont strictement positives dans (6.14) en fonction des variables nulles de (6.14). De la même façon, le nouveau système doit exprimer les variables strictement positives de (6.15) en fonction des variables nulles de (6.15) : x_1, x_5, x_6 (et z) en fonction de x_2, x_3 et x_4. En particulier, la variable x_1 qui vient juste de passer de zéro à une valeur strictement positive doit changer de côté du système d'équations (passer de droite à gauche dans le nouveau système). Quant à la variable x_4, qui elle est passée d'une valeur positive à nulle, elle devra apparaître à droite dans ce nouveau système.

Pour construire ce nouveau système nous commençons par le passage à gauche de x_1. Grâce à (6.12) et à sa première équation, on peut facilement écrire x_1 en fonction de x_2, x_3, x_4 :

$$x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \tag{6.16}$$

Ensuite, pour exprimer x_5, x_6 et z en fonction de x_2, x_3, x_4, on substitue l'expression de x_1 donnée par (6.16) dans les lignes correspondantes de (6.12).

$$\begin{aligned}
x_5 &= 11 - 4\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) - x_2 - 2x_3 \\
&= 1 + 5x_2 + 2x_4, \\
x_6 &= 8 - 3\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) - 4x_2 - 2x_3 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4, \\
z &= 5\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) + 4x_2 + 3x_3 \\
&= \frac{25}{2} - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4.
\end{aligned}$$

Ainsi le nouveau système s'écrit :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & = & \frac{5}{2} & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 & = & 1 & + & 5x_2 & & & + & 2x_4 \\
x_6 & = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{3}{2}x_4 \\
z & = & \frac{25}{2} & - & \frac{7}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{5}{2}x_4.
\end{array} \tag{6.17}$$

Comme déjà fait lors de la première itération, nous allons maintenant essayer d'augmenter la valeur de z en augmentant une variable de droite du nouveau système, tout en laissant les autres variables de droite à zéro. On peut remarquer que toute augmentation de x_2 ou x_4 ferait baisser la valeur de z, ce qui est contraire à notre objectif. On n'a donc pas d'autre choix que d'essayer d'augmenter x_3 : de combien ? La réponse est dans (6.17) : avec $x_2 = x_4 = 0$, la contrainte $x_1 \geq 0$ implique $x_3 \leq 5$, $x_5 \geq 0$ n'impose aucune restriction et $x_6 \geq 0$ implique que $x_3 \leq 1$. En conclusion $x_3 = 1$ est le mieux que l'on puisse faire, et la nouvelle solution est :

$$x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0 \tag{6.18}$$

et la nouvelle valeur de z passe de 12.5 à 13. Comme nous l'avons dit, on veut obtenir une solution améliorée mais aussi un système d'équations linéaires associé avec (6.18). Dans ce nouveau système les variables positive (strictement) x_2, x_4, x_6 apparaîtrons à droite. Pour construire ce système, à nouveau nous commençons par traiter la nouvelle venue côté gauche, x_3. Grâce à la troisième équation de (6.17) on réécrit x_3 et par substitution dans les équations restantes de (6.17) on obtient :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_3 & = & 1 & + & x_2 & + & 3x_4 & - & 2x_6 \\
x_1 & = & 2 & - & 2x_2 & - & 2x_4 & + & x_6 \\
x_5 & = & 1 & + & 5x_2 & + & 2x_4 & & \\
z & = & 13 & - & 3x_2 & - & x_4 & - & x_6.
\end{array} \tag{6.19}$$

Maintenant il est temps de passer à la troisième itération. D'abord, il faut choisir quelle variable augmenter du côté droit de (6.19) qui apporterait une augmentation de l'objectif z. Il n'y en a aucune car toute augmentation de x_2, x_4 ou x_6 ferait diminuer z. Nous sommes donc bloqués. En fait ce blocage indique que nous avons terminé, la dernière solution est optimale. Pourquoi ? La réponse est dans la dernière ligne de (6.19) :

$$z \quad = \quad 13 \quad - \quad 3x_2 \quad - \quad x_4 \quad - \quad x_6. \tag{6.20}$$

La dernière solution (6.18) donne une valeur $z = 13$; prouver que cette solution est optimale revient à prouver que toute solution réalisable satisfait $z \leq 13$. Puisque toute solution réalisable $x_1, x_2, \cdots, x_6$ satisfait, entre autres, les inéquations $x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, x_6 \geq 0$, alors $z \leq 13$ découle directement de (6.20).

6.2.2 Les dictionnaires

De manière générale, étant donné un problème

$$\begin{array}{rrcll} \text{Maximiser} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \text{Sous les contraintes :} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ & x_j & \geq & 0 & (j = 1, 2, \cdots, n) \end{array} \tag{6.21}$$

on introduit d'abord les variables d'écart $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ et on note la fonction objectif z. C'est-à-dire que l'on définit

$$\begin{array}{rcll} x_{n+i} & = & b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ z & = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \end{array} \tag{6.22}$$

Dans le cadre de la méthode du Simplexe, chaque solution réalisable $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de (6.21) est représentée par $n + m$ nombres positifs ou nuls $x_1, x_2, \cdots, x_{n+m}$, avec $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ définis par (6.22). Dans chaque itération, la méthode du Simplexe passe d'une solution réalisable $x_1, x_2, \cdots, x_{n+m}$ à une autre solution réalisable $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{n+m}$, qui est meilleure que la précédente au sens de

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j > \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

En fait l'inégalité n'est pas toujours stricte mais nous discuterons de ce point et d'autres dans la section suivante.

Comme nous l'avons vu dans l'exemple, il est pratique d'associer un système d'équations linéaires à chaque solution réalisable. En effet cela permet de trouver plus facilement des solutions améliorées. La technique est de traduire les choix de valeur effectués pour les variables de la partie droite du système dans les variables de la partie gauche ainsi que dans la fonction objectif. Ces systèmes ont été appelés des *dictionnaires* par J.E. Strum (1972). Donc, tout dictionnaire associé à (6.21) est un système d'équations dont les variables $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ et z sont exprimées à partir de $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Ces $n + m + 1$ variables sont fortement liées, et tout dictionnaire doit traduire ces interdépendances entre variables : les traductions doivent être correctes d'un dictionnaire à l'autre.

Propriété 1 : toute solution de l'ensemble des équations composant un dictionnaire doit être aussi une solution de (6.22) et *vice versa*.

Par exemple, pour tout choix de $x_1, x_2, \cdots, x_6$ et de z, les trois déclarations suivantes sont équivalentes :
- $x_1, x_2, \cdots, x_6, z$ constitue une solution de (6.12)
- $x_1, x_2, \cdots, x_6, z$ constitue une solution de (6.17)
- $x_1, x_2, \cdots, x_6, z$ constitue une solution de (6.19)

De ce point de vue, les trois dictionnaires (6.12),(6.17) et (6.19) contiennent la même information sur les interdépendances entre les sept variables. Cependant, chacun des trois dictionnaires présente les informations de manière spécifique. La forme de (6.12) suggère que nous pouvons choisir x_1, x_2 et x_3 à volonté alors que les valeurs de x_4, x_5, x_6 et z sont fixées : dans ce dictionnaire, les variables de décision x_1, x_2, x_3 agissent comme des variables indépendantes tandis que z et les variables d'écart x_4, x_5, x_6 sont liées entre elles. Le dictionnaire (6.17) présente x_2, x_3, x_4 comme indépendantes et x_1, x_5, x_6 et z comme liées. Dans le dictionnaire (6.19) les variables indépendantes sont x_2, x_4, x_6 et les variables liées sont x_3, x_1, x_5, z.

Propriété 2 : les équations de tout dictionnaire doivent exprimer m variables prises parmi $x_1, x_2, \cdots, x_{n+m}, z$ en fonction des n variables restantes.

Les propriétés 1 et 2 définissent ce que doit être un dictionnaire.

En plus de ces deux propriétés, les dictionnaires (6.12),(6.17) et (6.19) ont les propriétés suivantes :

Propriété 3 : en affectant les variables de droite avec zéro nous obtenons une solution réalisable en évaluant les variables de gauche.

Les dictionnaires qui possèdent cette dernière propriété sont appelés *dictionnaires réalisables*. En effet, tout dictionnaire réalisable décrit une solution réalisable. Cependant, toutes les solutions réalisables ne peuvent pas être décrites par un dictionnaire réalisable. Par exemple, aucun dictionnaire ne décrit la solution réalisable $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2, x_5 = 5, x_6 = 3$ de (6.10). les solutions réalisables qui peuvent être décrites par des dictionnaires sont appelées *basiques*. Une caractéristique principale du Simplexe est que l'algorithme ne travaille qu'avec des solutions basiques et ignore toutes les autres.

6.2.3 Un second exemple

Nous allons compléter notre aperçu de la méthode du Simplexe en l'appliquant à un deuxième exemple. Soit le PL :

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{Maximiser} & 5x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & & & \\
 & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
 & -x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

A vous de continuer ...

Pour ce cas le dictionnaire réalisable initial est :

$$\begin{array}{rclcrcrcr}
x_4 & = & 3 & - & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\
x_5 & = & 2 & + & x_1 & & & - & 3x_3 \\
x_6 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 \\
x_7 & = & 2 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 \\
\hline
z & = & & & 5x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3.
\end{array} \tag{6.23}$$

Ce dictionnaire réalisable décrit la solution réalisable :

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 3, x_5 = 2, x_6 = 4, x_7 = 2$$

Cependant il est inutile d'écrire cette solution comme nous venons de le faire, la solution est implicite dans le dictionnaire.

Dans la première itération nous essayons d'augmenter la valeur de z en rendant l'une des variables de droite strictement positive. A ce moment là, n'importe laquelle des trois variables x_1, x_2, x_3 fait l'affaire. Dans les petits exemples, il est souvent efficace de prendre celle qui a le coefficient le plus grand dans l'équation de z. Ici, cela nous laisse le choix entre x_1 et x_2 : nous décidons arbitrairement de rendre x_1 strictement positive. Si x_1 augmente, x_5 augmente aussi mais x_4, x_6 et x_7 diminuent, alors qu'elles doivent rester positives ou nulles. La contrainte $x_7 \geq 0$ est la plus forte sur l'incrémentation de x_1 et cela implique que $x_1 \leq 1$. Dans la solution réalisable améliorée, nous aurons $x_1 = 1$ et $x_7 = 0$. Nous devons alors construire le nouveau dictionnaire, dans lequel x_1 et x_7 doivent changer de côté.

D'après la quatrième équation de (6.23) on obtient :

$$x_1 = 1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_7 \tag{6.24}$$

Ensuite, par substitution de (6.24) dans (6.23) on obtient le dictionnaire :

$$
\begin{array}{rcrcrlcrlcrl}
x_1 & = & 1 & - & \frac{3}{2} & x_2 & + & \frac{1}{2} & x_3 & - & \frac{1}{2} & x_7 \\
x_4 & = & 2 & - & \frac{3}{2} & x_2 & - & \frac{3}{2} & x_3 & + & \frac{1}{2} & x_7 \\
x_5 & = & 3 & - & \frac{3}{2} & x_2 & - & \frac{5}{2} & x_3 & - & \frac{1}{2} & x_7 \\
x_6 & = & 2 & + & 4 & x_2 & - & 3 & x_3 & + & & x_7 \\
\hline
z & = & 5 & - & \frac{5}{2} & x_2 & + & \frac{11}{2} & x_3 & - & \frac{5}{2} & x_7.
\end{array}
\tag{6.25}
$$

Ce qui achève la première itération de la méthode du Simplexe.

Terminologie

Les variables x_j qui apparaissent du côté gauche d'un dictionnaire sont dites *variables de base* et celles qui apparaissent du côté droit sont dites *variables hors base*. On dit que les variables de base constitue une *base*. Cette base change à chaque itération avec une variable qui quitte la base et une autre qui entre dans la base par une opération dite *opération de pivot*.

Suite du second exemple

La variable qui doit entrer dans la base à la seconde itération est sans aucun doute x_3 car c'est la seule à coefficient positif dans l'équation de l'objectif. La contrainte la plus forte est donnée par x_6 qui doit donc quitter la base, d'où le nouveau dictionnaire :

$$
\begin{array}{rcrcrlcrlcrl}
x_3 & = & \frac{2}{3} & + & \frac{4}{3} & x_2 & + & \frac{1}{3} & x_7 & - & \frac{1}{3} & x_6 \\
x_1 & = & \frac{4}{3} & - & \frac{5}{6} & x_2 & - & \frac{1}{3} & x_7 & - & \frac{1}{6} & x_6 \\
x_4 & = & 1 & - & \frac{7}{2} & x_2 & & & & + & \frac{1}{2} & x_6 \\
x_5 & = & \frac{4}{3} & - & \frac{29}{6} & x_2 & - & \frac{4}{3} & x_7 & + & \frac{5}{6} & x_6 \\
\hline
z & = & \frac{26}{3} & + & \frac{29}{6} & x_2 & - & \frac{2}{3} & x_7 & - & \frac{11}{6} & x_6.
\end{array}
\tag{6.26}
$$

Dans la troisième itération, la variable entrante est x_2 et la variable sortante est x_5. Le pivot donne le dictionnaire suivant :

$$
\begin{array}{rcrcrlcrlcrl}
x_2 & = & \frac{8}{29} & - & \frac{8}{29} & x_7 & + & \frac{5}{29} & x_6 & - & \frac{6}{29} & x_5 \\
x_3 & = & \frac{30}{29} & - & \frac{1}{29} & x_7 & - & \frac{3}{29} & x_6 & - & \frac{8}{29} & x_5 \\
x_1 & = & \frac{32}{29} & - & \frac{3}{29} & x_7 & - & \frac{9}{29} & x_6 & + & \frac{5}{29} & x_5 \\
x_4 & = & \frac{1}{29} & + & \frac{28}{29} & x_7 & - & \frac{3}{29} & x_6 & + & \frac{21}{29} & x_5 \\
\hline
z & = & 10 & - & 2 & x_7 & - & & x_6 & - & & x_5.
\end{array}
\tag{6.27}
$$

Ici on ne peut plus faire entrer de nouvelle variable dans la base sans diminuer la valeur de l'objectif. La solution est donc atteinte, avec :

$$x_1 = \frac{32}{29}, x_2 = \frac{8}{29}, x_3 = \frac{30}{29}$$

et une valeur de 10 pour l'objectif z.

6.3 Les pièges de la méthode du Simplexe

Nous avons vu, à l'aide d'exemples simples, comment résoudre des problèmes linéaires en utilisant l'algorithme du simplexe. Sur nos exemples, tout se déroulait bien, mais nous avons évité certains pièges...

Le but de cette partie du cours est donc d'analyser rigoureusement la méthode du simplexe, afin de découvrir tous les cas particuliers qui peuvent se présenter. Pour cela, nous allons regarder l'algorithme pas à pas. Trois sortes de problèmes peuvent se poser :

1. Lors de l'**initialisation**, il se peut que l'on ne soit pas capable de débuter, i.e de trouver une solution réalisable. Comment, dans ce cas, obtenir un dictionnaire réalisable ?
2. Lors d'une **itération**, peut-on toujours choisir une variable entrant en base, une sortant de la base et construire le dictionnaire suivant ?
3. La **terminaison** est-elle garantie ou l'algorithme peut-il construire une séquence infinie de dictionnaires sans jamais atteindre la solution optimale ?

6.3.1 Initialisation

Lors des exemples précédents, l'initialisation n'a jamais posé de problème. En effet, étant donné le problème suivant,

$$\begin{array}{rrcll} \text{Maximiser} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ \text{Sous les contraintes :} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ & x_j & \geq & 0 & (j = 1, 2, \cdots, n). \end{array} \tag{6.28}$$

nous construisions le dictionnaire initial en écrivant simplement les formules définissant les variables d'écart et la fonction objectif :

$$\begin{array}{rcll} x_{n+i} & = & b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ z & = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \end{array} \tag{6.29}$$

En général, ce dictionnaire est réalisable si et seulement si toutes les variables à droite dans (6.28), b_i, sont positives. Ce qui est le cas si et seulement si $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\cdots$, $x_n = 0$ est une solution réalisable de (6.28).

Les problèmes (6.28) avec tous les b_i positifs sont appelés **problèmes avec une origine réalisable** (l'ensemble des valeurs nulles est appelé origine).

Pour le moment, nous ne nous intéresserons qu'aux problèmes avec une origine réalisable. Ceux ayant une origine non réalisable seront traités ultérieurement.

6.3.2 Itération

Étant donné un dictionnaire réalisable, nous devons choisir la variable qui entre en base, celle qui en sort et construire le dictionnaire suivant en effectuant un pivot.

Choix de la variable entrante

La variable qui entre est une variable hors base x_j avec un coefficient, dans la dernière ligne du dictionnaire, c_j positif. Cette règle est ambiguë, en effet plusieurs variables peuvent être candidates pour entrer en base, ou aucune. La dernière alternative implique que le dictionnaire décrit une solution optimale et que l'algorithme est fini. Plus précisément, considérons la dernière ligne de notre dictionnaire,

$$z = z^* + \sum_{j \in N} \overline{c}_j x_j$$

où N représente l'ensemble des indices j des variables hors base.

Avec la solution courante $x_j = 0 \ \forall j \in N$, la fonction objectif a pour valeur numérique z^*. Si $\overline{c}_j \leq 0$ $\forall j \in N$, alors toute solution réalisable, avec $x_j \geq 0 \ \forall j \in N$, donne à la fonction objectif une valeur numérique inférieure ou égale à z^*. La solution courante est donc optimale.

D'autre part, si plusieurs variables sont candidates pour entrer en base, n'importe laquelle fera l'affaire. (Si le problème est de petite taille et résolu à la main, on choisit d'habitude la variable x_j qui a le plus grand coefficient $\overline{c}_j$. Pour des problèmes implémentés sur un ordinateur, cette pratique est abandonnée et nous verrons plus tard comment est choisie la variable entrant en base).

Choix de la variable sortante

La variable qui sort est la variable de base qui, par sa contrainte de positivité, donne la plus petite borne supérieure sur la croissance de la variable entrante (c'est donc celle qui permet de savoir de combien on peut augmenter, au plus, la variable entrante). De nouveau, cette règle est ambiguë, en effet plusieurs variables peuvent être candidates pour quitter la base, ou aucune. La dernière alternative est illustrée sur l'exemple suivant :

$$\begin{array}{rcccccccc} x_2 & = & 5 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 3x_1 \\ x_5 & = & 7 & + & & - & 3x_4 & - & 4x_1 \\ \hline z & = & 5 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_1 \end{array}$$

La variable entrante est x_3, mais aucune des variables de base x_2, x_5 n'impose une borne supérieure sur sa croissance. Ainsi, on peut augmenter x_3 autant que l'on veut (tout en gardant $x_1 = x_4 = 0$) et la solution obtenue reste réalisable. Ainsi, posons $x_3 = t$, $t > 0$, on obtient une solution réalisable avec $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 = 5 + 2t$, $x_5 = 7$ et $z = 5 + t$. Comme t peut être choisi très grand, z peut être très grand. On peut donc en conclure que le problème n'est pas borné :
$\forall M, \exists x_1, \cdots, x_n$ solution réalisable telle que $x_3 - x_4 - x_1 > M$. On peut toujours arriver à cette conclusion, en général. S'il n'y a pas de candidat pour quitter la base, alors on peut augmenter la valeur de la variable entrante, et donc la valeur de la fonction objectif, autant que l'on veut. Dans ce cas, le problème n'est pas borné.

D'autre part, si plusieurs variables sont candidates pour quitter la base, n'importe laquelle fera l'affaire. Maintenant que nous avons effectué le choix des variables entrantes et sortantes, pivoter est un jeu d'enfants !

6.3.3 Terminaison

Dégénérescence

La présence de plusieurs candidats pour quitter la base a des conséquences intéressantes. Pour illustrer ce fait, regardons le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{rclcrcrcr}
x_4 & = & 1 & & & & & - & 2x_3 \\
x_5 & = & 3 & - & 2x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 \\
x_6 & = & 2 & + & x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 \\
\hline
z & = & & & 2x_1 & - & x_2 & + & 8x_3
\end{array}$$

Après avoir choisi x_3 comme variable entrant en base, on trouve que les trois variables de base x_4, x_5, x_6 limitent la croissance de x_3 à $\frac{1}{2}$. Ainsi chacune de ces trois variables peut être choisie pour quitter la base. Nous choisissons arbitrairement x_4. Après avoir pivoté, on obtient le dictionnaire :

$$\begin{array}{rclcrcrcr}
x_3 & = & \frac{1}{2} & & & & & - & \frac{1}{2}x_4 \\
x_5 & = & & - & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_4 \\
x_6 & = & & & x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_4 \\
\hline
z & = & 4 & + & 2x_1 & - & x_2 & - & 4x_4
\end{array}$$

Ce dictionnaire diffère de tous les autres rencontrés jusqu'à présent. En effet, dans la solution réalisable associée à ce dictionnaire, les variables de base x_5 et x_6 sont nulles.
Les solutions de base ayant une (ou plusieurs) variable(s) de base nulle(s) sont dites **dégénérées**.

La dégénérescence peut avoir des effets de bord ennuyeux. Ce fait est illustré par les itérations suivantes de l'exemple précédent. En effet, x_1 entre en base et x_5 quitte la base. A cause de la dégénérescence, la contrainte $x_5 \geq 0$ limite l'incrément de x_1 à zéro. Ainsi la valeur de x_1 reste inchangée, de même que les valeurs des autres variables et de la fonction objectif z. C'est ennuyeux, puisque la motivation première de l'algorithme du simplexe est d'augmenter la valeur de la fonction objectif à chaque itération. Pour cette itération, notre désir reste insatisfait et le pivot nous donne le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{rclcrcrcr}
x_1 & = & & & 2x_2 & + & \frac{3}{2}x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 \\
x_3 & = & \frac{1}{2} & & & - & \frac{1}{2}x_4 & & \\
x_6 & = & & - & x_2 & + & \frac{7}{2}x_4 & - & \frac{1}{2}x_5 \\
\hline
z & = & 4 & + & 3x_2 & - & x_4 & - & x_5
\end{array}$$

Cela n'affecte pas la solution associée.
Les itérations du simplexe qui ne modifient pas la solution de base sont dites **dégénérées**.
Vous pourrez vérifier que l'itération suivante est à nouveau dégénérée, mais celle d'après ne l'est pas et fournit la solution optimale.

Dans un sens, la dégénérescence est accidentelle. En effet, une variable de base ne peut disparaître (i.e valoir zéro) que si les opérations successives du pivot mènent exactement à la suppression dans chaque ligne d'une même variable.
Pourtant la dégénérescence abonde dans les problèmes linéaires provenant d'applications pratiques. Il a été

dit que presque tous les problèmes pratiques mènent à une solution de base réalisable dégénérée à une certaine itération de l'algorithme du simplexe. Quoi qu'il se passe, la méthode du simplexe peut stagner en passant par quelques itérations (parfois nombreuses) dégénérées sur une ligne. En règle générale, un tel bloc d'itérations se termine par la découverte d'une itération non dégénérée. Mais ce n'est pas toujours le cas et nous allons vous présenter un contre-exemple.

Les cycles

Est-ce que la méthode du simplexe peut engendrer un nombre infini d'itérations sans jamais trouver la solution optimale ? La réponse est OUI. Pour justifier ce fait, considérons le dictionnaire suivant :

$$\begin{array}{rcllrcrcrcr}
x_5 & = & & & -0.5x_1 & + & 5.5x_2 & + & 2.5x_3 & - & 9x_4 \\
x_6 & = & & & -0.5x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & - & x_4 \\
x_7 & = & 1 & - & x_1 & & & & & & \\
\hline
z & = & & & 10x_1 & - & 57x_2 & - & 9x_3 & - & 24x_4
\end{array}$$

On pose les règles suivantes :

i La variable entrante sera toujours la variable hors base ayant le plus grand coefficient dans la ligne du dictionnaire associée à la fonction objectif z.

ii Si plusieurs variables peuvent être choisies pour quitter la base, on prendra celle de plus petit indice.

Ainsi, nous obtenons pour les six prochaines itérations, les dictionnaires suivants :

Après la première itération :

$$\begin{array}{rcllrcrcrcr}
x_1 & = & & & 11x_2 & + & 5x_3 & - & 18x_4 & - & 2x_5 \\
x_6 & = & & - & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 8x_4 & + & x_5 \\
x_7 & = & 1 & - & 11x_2 & - & 5x_3 & + & 18x_4 & + & 2x_5 \\
\hline
z & = & & & 53x_2 & + & 41x_3 & - & 204x_4 & - & 20x_5
\end{array}$$

Après la seconde itération :

$$\begin{array}{rcllrcrcrcr}
x_2 & = & & - & 0.5x_3 & + & 2x_4 & + & 0.25x_5 & - & 0.25x_6 \\
x_1 & = & & - & 0.5x_3 & + & 4x_4 & + & 0.75x_5 & - & 2.75x_6 \\
x_7 & = & 1 & + & 0.5x_3 & - & 4x_4 & - & 0.75x_5 & - & 13.25x_6 \\
\hline
z & = & & & 14.5x_3 & - & 98x_4 & - & 6.75x_5 & - & 13.25x_6
\end{array}$$

Après la troisième itération :

$$\begin{array}{rcllrcrcrcr}
x_3 & = & & - & 8x_4 & + & 1.5x_5 & - & 5.5x_6 & - & 2x_1 \\
x_2 & = & & - & 2x_4 & - & 0.5x_5 & - & 2.5x_6 & + & x_1 \\
x_7 & = & 1 & & & & & & & - & x_1 \\
\hline
z & = & & & 18x_4 & + & 15x_5 & - & 93x_6 & - & 29x_1
\end{array}$$

Après la quatrième itération :

$$\begin{array}{rcllrcrcrcr}
x_4 & = & & - & 0.25x_5 & + & 1.25x_6 & + & 0.5x_1 & - & 0.5x_2 \\
x_3 & = & & - & 0.5x_5 & + & 4.5x_6 & + & 2x_1 & - & 4x_2 \\
x_7 & = & 1 & & & & & - & x_1 & & \\
\hline
z & = & & & 10.5x_5 & - & 70.5x_6 & - & 20x_1 & - & 9x_2
\end{array}$$

Après la cinquième itération :

$$\begin{array}{rcllrcrcrcr}
x_5 & = & & & 9x_6 & + & 4x_1 & - & 8x_2 & - & 2x_3 \\
x_4 & = & & - & x_6 & - & 0.5x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 \\
x_7 & = & 1 & & & - & x_1 & & & & \\
\hline
z & = & & & 24x_6 & + & 22x_1 & - & 93x_2 & - & 21x_3
\end{array}$$

Après la sixième itération :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_6 & = & & - & 0.5x_1 & + & 1.5x_2 & + & 0.5x_3 & - & x_4 \\
x_5 & = & & - & 0.5x_1 & + & 5.5x_2 & + & 2.5x_3 & - & 9x_4 \\
x_7 & = & 1 & - & x_1 & & & & & & \\
\hline
z & = & & & 10x_1 & - & 57x_2 & - & 9x_3 & - & 24x_4
\end{array}
$$

Puisque le dictionnaire construit après la sixième itération est identique au dictionnaire initial, la méthode bouclera sur les mêmes itérations indéfiniment, sans jamais trouver la solution optimale (laquelle, comme nous le verrons plus tard, vaut 1). Ce phénomène est connu sous le nom de **cycle**. Plus précisément, nous disons que la méthode du simplexe cycle si un dictionnaire apparaît dans deux itérations différentes (et donc la séquence d'itérations menant de ce dictionnaire à lui-même peut être répétée sans fin). Il faut noter que les cycles ne peuvent apparaître qu'en présence de dégénérescence : puisque la valeur de la fonction objectif augmente avec chaque itération non dégénérée et reste inchangée après celles qui le sont, toutes les itérations dans une séquence menant d'un dictionnaire à lui-même doivent être dégénérées. Les cycles sont la raison pour laquelle la méthode du simplexe peut ne pas terminer ; le théorème suivant montre que c'est l'unique raison.

Théorème 6.1 *Si la méthode du simplexe ne termine pas, alors elle doit cycler.*

Preuve: Pour commencer, il faut noter qu'il existe seulement un nombre fini de façons de choisir m variables de base parmi les $n + m$ variables. Donc, si la méthode du simplexe ne s'arrête pas, une certaine base doit apparaître dans deux itérations différentes. Maintenant nous devons juste montrer que deux dictionnaires ayant la même base sont identiques (Ce fait devient trivial si l'on décrit les dictionnaires à l'aide de matrices, nous n'utiliserons pas cette méthode). Considérons deux dictionnaires

$$
\begin{array}{rcrcl}
x_i & = & b_i & - & \sum_{j \notin B} a_{ij} x_j \quad (i \in B) \\
z & = & v & + & \sum_{j \notin B} c_j x_j
\end{array}
\tag{6.30}
$$

et

$$
\begin{array}{rcrcl}
x_i & = & b_i^* & - & \sum_{j \notin B} a_{ij}^* x_j \quad (i \in B) \\
z & = & v^* & + & \sum_{j \notin B} c_j^* x_j
\end{array}
\tag{6.31}
$$

avec le même ensemble de variables de base x_i $(i \in B)$.
Par définition d'un dictionnaire, toute solution $x_1, x_2, \cdots, x_{n+m}, z$ de (6.30) est une solution de (6.31) et vice versa. En particulier, si x_k est une variable hors base et t un nombre, alors les nombres
$x_k = t$, $x_j = 0$ $(j \notin B$ et $j \neq k)$, $x_i = b_i - a_{ik}t (i \in B)$, $z = v + c_k t$,
constituant une solution de (6.30), doivent satisfaire (6.31). Par conséquent,
$b_i - a_{ik}t = b_i^* - a_{ik}^* t$ $\forall i \in B$, et $v + c_k t = v^* + c_k^* t$.
Puisque ces égalités sont vérifiées quel que soit t, on a :
$b_i = b_i^*, a_{ik} = a_{ik}^*$ $\forall i \in B$, et $v = v^*, c_k = c_k^*$.
Comme x_k est une variable hors base quelconque, les deux dictionnaires sont identiques. □

Le phénomène de cycle est assez rare. En fait, construire un programme linéaire pour lequel la méthode du simplexe cycle est difficile. (Notre exemple est adapté de K.T. Marshall et J.W. Suurballe (1969). Le premier exemple de cette taille a été construit par E.M.L Beale (1955) et le premier exemple jamais construit est dû à A.J. Hoffman (1953). Marshall et Suurballe (1969) ont montré que si la méthode du simplexe cycle sur un problème possédant une solution optimale, alors les dictionnaires doivent comporter au moins six variables et au moins trois équations.) P. Wolfe (1963) et T.C.T. Kotiah et D.I. Steinberg (1978) ont rapporté qu'ils avaient obtenu des cas de cycles pour des problèmes pratiques mais ces cas sont insuffisants. C'est pourquoi, dans la plupart des implémentations de l'algorithme du simplexe, le problème du cycle n'est pas pris en compte.

Plusieurs méthodes existent pour prévenir le phénomène de cycle. La méthode classique de perturbation et la méthode lexicographique évitent de cycler par un choix judicieux de la variable sortant à chaque itération du simplexe. La règle du plus petit indice, méthode plus récente, se base sur le choix de la variable entrante et aussi de celle sortante. Cette dernière méthode, quant à elle, ne nécessite pas de calcul supplémentaire, mais elle ne laisse pas le choix des variables entrant et sortant.

La règle du plus petit indice : Lorsque plusieurs variables sont candidates pour entrer (resp. sortir) de la base, on prend toujours celle ayant le plus petit indice. La motivation pour adopter cette règle provient du résultat suivant :

Théorème 6.2 *La méthode du simplexe s'arrête dès lors que les variables entrantes et sortantes sont sélectionnées via la règle du plus petit indice, à chaque itération.*

6.3.4 Initialisation

Le dernier problème que nous allons examiner est celui d'un dictionnaire réalisable initial ayant une origine non réalisable. Il y a deux sortes de problèmes lorsqu'on a une origine non réalisable. Tout d'abord on peut n'avoir aucune solution réalisable. Ensuite, même si une solution réalisable est apparente on peut ne pas avoir de dictionnaire réalisable. Une manière de franchir ces obstacles est d'utiliser un problème, dit problème auxiliaire :

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{Minimiser} & x_0 & & & \\
\text{Sous les contraintes :} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_0 & \leq & b_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\
 & x_j & \geq & 0 & (j = 0, 1, \cdots, n).
\end{array}
$$

Une solution réalisable du problème auxiliaire est facilement disponible : il suffit de poser $x_j = 0 \forall j \in [1 \ldots n]$ et de prendre x_0 suffisamment grand. De plus il est facile de voir que le problème originel a une solution réalisable si et seulement si le problème auxiliaire a une solution réalisable avec $x_0 = 0$. Autrement dit, le problème originel a une solution réalisable si et seulement si la valeur optimale du problème auxiliaire est nulle. Ainsi l'idée est de résoudre tout d'abord le problème auxiliaire ; les détails techniques seront illustrés à l'aide de l'exemple suivant :

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Maximiser} & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & & & \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & -5 \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \leq & -1 \\
 & & & & x_1, & x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Pour éviter toute confusion, nous écrirons le problème auxiliaire sous la forme d'une maximisation :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{Maximiser} & -x_0 & & & & & & & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & & & & & \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_0 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_0 & \leq & -5 \\
 & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_0 & \leq & -1 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3, x_6 & \geq & 0 & &
\end{array}
$$

En écrivant les formules des variables d'écart x_4, x_5, x_6 et la fonction objectif w, on obtient le dictionnaire

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_4 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_0 \\
x_5 & = & -5 & - & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_0 \\
x_6 & = & -1 & + & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_0 \\
w & = & & & & & & & & - & x_0.
\end{array}
\tag{6.32}
$$

Ce dictionnaire n'est pas réalisable. Toutefois ce dictionnaire non réalisable peut être transformé en un dictionnaire réalisable par un simple pivot avec, x_0 entrant en base et x_5 quittant la base :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_0 & = & 5 & + & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & x_5 \\
x_4 & = & 9 & & & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_5 \\
x_6 & = & 4 & +3 & x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_5 \\
\hline
w & = & -5 & - & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_5.
\end{array}
$$

En général le problème auxiliaire peut s'écrire :

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{Maximiser} & -x_0 & & & \\
\text{Sous les contraintes :} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_0 & \leq & b_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\
 & x_j & \geq & 0 & (j = 1, 2, \cdots, n).
\end{array}
$$

En écrivant les formules définissant les variables d'écart $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ et la fonction objectif w, on obtient le dictionnaire suivant :

$$
\begin{array}{rclcccl}
x_{n+i} & = & b_i - & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & + & x_0 & (i = 1, 2, \cdots, m) \\
w & = & & & - & x_0 &
\end{array}
$$

Ce dictionnaire n'est pas réalisable. Toutefois ce dictionnaire peut être transformé en un dictionnaire réalisable par un simple pivot, avec x_0 entrant en base et la variable “la plus non réalisable” x_{n+i} quittant la base. Plus précisément, la variable sortante x_{n+k} est celle dont la valeur négative b_k a la plus grande valeur négative parmi tous les b_i. Après avoir pivoté, la variable x_0 est supposée valoir $-b_k$ et chacun des x_{n+i} doit valoir $b_i - b_k$. Ces valeurs étant toutes positives, nous sommes maintenant capable de résoudre le problème auxiliaire à l'aide de la méthode du simplexe. Reprenons notre exemple.

Après la première itération avec x_2 entrant et x_6 sortant, on obtient :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_2 & = & 1 & + & 0.75x_1 & + & 0.75x_3 & + & 0.25x_5 & - & 0.25x_6 \\
x_0 & = & 2 & - & 0.25x_1 & - & 1.25x_3 & + & 0.25x_5 & + & 0.75x_6 \\
x_4 & = & 7 & - & 1.5x_1 & - & 2.5x_3 & + & 0.5x_5 & + & 0.5x_6 \\
\hline
w & = & -2 & + & 0.25x_1 & + & 1.25x_3 & - & 0.25x_5 & - & 0.75x_6.
\end{array}
$$

Après la deuxième itération, avec x_3 entrant et x_0 sortant :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_3 & = & 1.6 & - & 0.2x_1 & + & 0.2x_5 & + & 0.6x_6 & - & 0.8x_0 \\
x_2 & = & 2.2 & + & 0.6x_1 & + & 0.4x_5 & + & 0.2x_6 & - & 0.6x_0 \\
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & & - & x_6 & + & 2x_0 \\
\hline
w & = & & & & & & & & - & x_0.
\end{array}
\tag{6.33}
$$

Le dernier dictionnaire (6.33) est optimal. Puisque la valeur optimal du problème auxiliaire est nulle, le dictionnaire (6.33) fournit une solution réalisable du problème originel : $x_1 = 0, x_2 = 2.2, x_3 = 1.6$. De plus, (6.33) peut aisément être converti en un dictionnaire réalisable du problème originel. Pour obtenir les trois premières lignes du dictionnaire désiré, on copie simplement les trois premières lignes de (6.33), en oubliant tous les termes impliquant x_0 :

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_3 & = & 1.6 & - & 0.2x_1 & + & 0.2x_5 & + & 0.6x_6 \\
x_2 & = & 2.2 & + & 0.6x_1 & + & 0.4x_5 & + & 0.2x_6 \\
x_4 & = & 3 & - & x_1 & & & - & x_6
\end{array}
\tag{6.34}
$$

Pour obtenir la dernière ligne, nous devons exprimer la fonction objectif originel

$$
z = x_1 - x_2 + x_3 \tag{6.35}
$$

en fonction des variables hors base x_1, x_5, x_6. Pour cela on remplace les variables de (6.35) par (6.34) et l'on obtient :

$$z = x_1 - (2.2 + 0.6x_1 + 0.4x_5 + 0.2x_6) + (1.6 - 0.2x_1 + 0.2x_5 + 0.6x_6) \qquad (6.36)$$
$$z = -0.6 + 0.2x_1 - 0.2x_5 + 0.4x_6$$

En bref, le dictionnaire désiré est :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_3 & = & 1.6 & - & 0.2x_1 & + & 0.2x_5 & + & 0.6x_6 \\ x_2 & = & 2.2 & + & 0.6x_1 & + & 0.4x_5 & + & 0.2x_6 \\ x_4 & = & 3 & - & x_1 & & & - & x_6 \\ \hline z & = & -0.6 & + & 0.2x_1 & - & 0.2x_5 & + & 0.4x_6 \end{array}$$

Clairement la même procédure transformera un dictionnaire optimal du problème auxiliaire en un dictionnaire réalisable du problème originel, à chaque fois que x_0 est hors base.

Maintenant revenons sur la situation générale. Nous avons vu comment construire le problème auxiliaire et son premier dictionnaire réalisable. Dans le processus de résolution du problème auxiliaire on peut rencontrer un dictionnaire dans lequel x_0 est en compétition avec d'autres variables pour quitter la base. Si cela arrive et lorsque cela arrive, il est naturel de choisir x_0 comme variable sortante. Après avoir pivoté, on obtient un dictionnaire dans lequel

$$x_0 \textit{ est hors base et donc la valeur de } w \textit{ est nulle.} \qquad (6.37)$$

Clairement un dictionnaire réalisable possédant cette propriété est optimal. Cependant, l'optimum du problème auxiliaire peut être atteint lorsque x_0 est toujours en base ainsi, on peut obtenir un dictionnaire optimal où

$$x_0 \textit{ est une variable de base et } w \textit{ est non nul} \qquad (6.38)$$

ou, un dictionnaire optimal où

$$x_0 \textit{ est une variable de base et } w \textit{ est nul.} \qquad (6.39)$$

Examinons le cas (6.39). Puisque l'avant-dernier dictionnaire n'était pas optimal, la valeur de $w = -x_0$ a dû passer d'une valeur négative à zéro dans la dernière itération. Autrement dit, la valeur de la variable de base x_0 a dû passer d'un niveau positif à zéro lors de la dernière itération. Mais alors x_0 était candidate pour quitter la base ; nous ne l'avons pas choisi, ce qui contredit notre politique. Cette contradiction montre que (6.39) ne peut pas arriver. Par conséquent le dictionnaire optimal du problème auxiliaire a soit la propriété (6.37) soit la propriété (6.38). Dans le premier cas on construit un dictionnaire réalisable du problème originel comme expliqué précédemment et l'on résout le problème originel à l'aide de la méthode du simplexe. Dans le second cas, on en conclut simplement que le problème originel est non réalisable.

Cette stratégie est connue sous le nom de **méthode du simplexe en deux phases**. Dans la première phase, on pose et résout le problème auxiliaire ; si le dictionnaire optimal vérifie la propriété (6.37) alors on passe à la seconde phase qui consiste à résoudre le problème originel.

6.3.5 Le théorème fondamental de la programmation linéaire

Théorème 6.3 *Tout programme linéaire sous forme standard vérifie l'une des trois propriétés suivantes :*
(i) S'il n'a pas de solution optimale, alors il est soit réalisable, soit non borné
(ii) S'il a une solution réalisable, alors il a une solution de base réalisable.
(iii) S'il a une solution optimale, alors il a une solution de base optimale.

Preuve: La première phase du simplexe en deux phases nous dit soit que le problème est non réalisable, soit nous donne une solution de base réalisable. La deuxième phase de la méthode du simplexe en deux phases nous dit soit que le problème est non borné, soit nous donne une solution de base optimale. □

Notez que la première propriété n'est pas partagée par les problèmes dont les contraintes peuvent inclure des inégalités linéaires strictes $\sum a_j x_j < b$. Prenons l'exemple trivial :

maximiser x sous la condition $x < 0$

Ce problème est réalisable et borné et n'admet pourtant aucune solution optimale. Les deux propriétés (ii) et (iii) nous disent que, lorsque l'on cherche des solutions réalisables ou optimales pour un problème linéaire sous forme standard, on peut limiter notre recherche à un ensemble fini. Ces deux propriétés, faciles à établir à la base, sont souvent utilisées pour motiver la méthode du simplexe. Notre exposé a suivi un chemin inverse, puisque nous nous sommes concentrés sur la résolution du problème et avons obtenu, avec peu d'efforts, le théorème fondamental de la programmation linéaire.

6.4 Exercices

Exercice 6.1 Dites quel(s) problème(s) parmi P1,P2,P3 sont sous forme standard ?

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{P1 : Maximiser} & 3x_1 & - & 5x_2 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & 4x_1 & + & 5x_2 & \geq & 3 \\
& 6x_1 & - & 6x_2 & = & 7 \\
& x_1 & + & 8x_2 & \leq & 20 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\text{P2 : Minimiser} & 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 5x_5 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & 9x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & + & 3x_5 & \leq & 5 \\
& 8x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & + & 9x_4 & + & 3x_5 & \leq & 2 \\
& & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{P3 : Maximiser} & 8x_1 & - & 4x_2 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\
& 9x_1 & + & 5x_2 & \leq & -2 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Exercice 6.2 Mettre sous la forme standard :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\text{P4 : Minimiser} & -8x_1 & + & 9x_2 & + & 2x_3 & - & 6x_4 & - & 5x_5 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & 6x_1 & + & 6x_2 & - & 10x_3 & + & 2x_4 & - & 8x_5 & \geq & 3 \\
& & & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Exercice 6.3 Prouver que (6.7) est non réalisable est que (6.8) n'est pas bornée.

Exercice 6.4 Trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour les nombres s et t pour que le problème :

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{P5 : Maximiser} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & sx_1 & + & tx_2 & \leq & 1 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

a) ait une solution optimale ;
b) soit non réalisable ;
c) soit non borné.

Exercice 6.5 Prouver ou réfuter : si le problème (6.9) est non borné, alors il existe un indice k tel que le problème :

$$\begin{array}{lrcll}
\text{Maximiser} & x_k & & & \\
\text{Sous les contraintes :} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j & \leq & b_i & (i = 1, 2, \cdots, m) \\
& x_j & \geq & 0 & (j = 1, 2, \cdots, n)
\end{array}$$

est non borné.

Exercice 6.6 Un assembleur de mobiles doit fournir par contrat 20000 téléphones dans les quatre prochaines semaines. Le client payera 20 € pour chaque mobile livré avant la fin de la première semaine, 18 € pour ceux livrés avant la fin de la deuxième semaine, 16 € pour ceux livrés avant la fin de la troisième semaine et 14 € avant la fin de la quatrième. Chaque ouvrier peut assembler 50 mobiles par semaine. La société ne peut honorer la commande avec ses 40 ouvriers, ainsi elle doit embaucher et former des travailleurs temporaires. Chacun des 40 ouvriers permanents peut être affecté à la formation d'une classe de trois travailleurs temporaires. Après une semaine de formation, ceux qui ont suivi la formation peuvent soit monter des mobiles soit instruire des ouvriers non qualifiés.

A cet instant il n'y a pas d'autre contrat en cours mais tous les ouvriers, permanents ou temporaires, seront payés jusqu'à la fin des quatre semaines (même si certains sont inoccupés).

Un ouvrier qui produit des mobiles, est inactif ou instruit reçoit un salaire de 200 € par semaine alors qu'un ouvrier en formation perçoit 100 € par semaine. Le coût de production (sans compter les salaires) est de 5 € par mobile.

Par exemple, la compagnie peut adopter le programme de fabrication suivant.

Semaine 1	10 assembleurs, 30 instructeurs, 90 apprentis Salaires des travailleurs : 8000 € Salaires des apprentis : 9000 € Profit sur les 500 mobiles : 7500 € Perte nette : 9500 €
Semaine 2	120 assembleurs, 10 instructeurs, 30 apprentis Salaires des travailleurs : 26000 € Salaires des apprentis : 3000 € Profit sur les 6000 mobiles : 78000 € Profit net : 49000 €
Semaine 3	160 assembleurs Salaires des travailleurs : 32000 € Profit sur les 8000 mobiles : 88000 € Profit net : 56000 €
Semaine 4	110 assembleurs, 50 inactifs Salaires des travailleurs : 32000 € Profit sur les 5500 mobiles : 49500 € Profit net : 17500 €

Ce programme de planification qui rapporte 113000 € à la compagnie est l'un des nombreux possibles. La compagnie souhaite faire le meilleur bénéfice possible : formulez ce problème sous la forme d'un PL (pas nécessairement sous forme standard).

Exercice 6.7 Le problème de la bicyclette est celui où n personnes qui doivent parcourir 10 km et disposent d'une seule bicyclette (monoplace). Les données pour une personne j sont : w_j sa vitesse de marche à pieds et b_j sa vitesse à bicyclette. Le problème consiste à minimiser la date d'arrivée de la dernière des 10 personnes (essayez de résoudre le cas $n = 3, w_1 = 4, w_2 = w_3 = 2, b_1 = 16, b_2 = b_3 = 12$). Montrez que la valeur optimale du problème PL

$$
\begin{array}{rrcll}
\text{Minimiser} & t & & & \\
\text{Sous les contraintes :} & t - x_j - x_j^{'} - y_j - y_j^{'} & \geq & 0 & (j = 1, 2, \cdots, n) \\
 & t - \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{j=1}^{n} y_j^{'} & \geq & 0 & \\
 & w_j x_j - w_j x_j^{'} + b_j y_j - b_j y_j^{'} & = & 10 & (j = 1, 2, \cdots, n) \\
 & \sum_{j=1}^{n} b_j y_j - \sum_{j=1}^{n} b_j y_j^{'} & \geq & 10 & \\
 & x_j, x_j^{'}, y_j, y_j^{'} & \geq & 0 & (j = 1, 2, \cdots, n)
\end{array}
$$

donne une borne inférieure sur la valeur optimale du problème de la bicyclette.

Exercice 6.8 Résoudre par la méthode du simplexe les problèmes suivants :

a)

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Maximiser} & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & & & \\
& x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
& 2x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 5 \\
& 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 7 \\
& & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{Maximiser} & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & + & 8x_4 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & & & & & \\
& x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 5 \\
& x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 3 \\
& & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{Maximiser} & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & \\
& 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 3 \\
& x_1 & + & 5x_2 & \leq & 1 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
& 4x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

d)

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Maximiser} & x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & & & & & \\
& 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \leq & 10 \\
& 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\
& x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\
& & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Exercice 6.9 Une usine d'emballage de viande produit 480 unités de jambons, 400 unités de poitrines de porcs et 230 unités de lardons chaque jour. Chacun de ces produits peut être vendu frais ou fumé. Le nombre total d'unités de produits pouvant être fumées au cours d'une journée normale de travail est de 420. De plus, 250 unités de produits supplémentaires peuvent être fumées au cours d'heures supplémentaires pour un coût plus élevé. Les bénéfices net par unité produite sont les suivants :

	Frais	Fumé en heures normales	Fumé en heures supplémentaires
Jambons	8 €	14 €	11 €
Poitrines	4 €	12 €	7 €
Lardons	4 €	13 €	9 €

Par exemple, la planification suivante rapporte un bénéfice net de 9965 €.

	Frais	Fumés en heures normales	Fumés en heures supplémentaires
Jambons	165	280	35
Poitrines	295	70	35
Lardons	55	70	105

On veut trouver la planification qui maximise le bénéfice total net. Formulez ce problème en programme linéaire et le résoudre.

Exercice 6.10 Une entreprise fabrique 2 produits X et Y. Pour sa conception, chaque produit fini nécessite 3 produits intermédiaires A, B et C. Pour fabriquer un produit X, on a besoin de 2 produits A, de 2 produits B et de 1 produit C. De même, pour fabriquer un produit Y, on a besoin de 3 produits A, de 1 produit B et de 3 produits C. En outre, l'entreprise dispose d'une quantité limitée de produits A, B et C. Elle a 180 produits A, 120 produits B et 150 produits C. Sachant que le prix de revient de X est 3 euros et que celui de Y est de 4 euros, combien de produits X et Y faut-il fabriquer pour maximiser le profit ? Quel est alors le profit maximum ?

Exercice 6.11 Résoudre les problèmes suivants par la méthode du simplexe en deux phases.

a)

$$\begin{array}{llcl}
\text{Maximiser} & 3x_1 + x_2 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & \\
& x_1 - x_2 & \leq & -1 \\
& -x_1 - x_2 & \leq & -3 \\
& 2x_1 + x_2 & \leq & 4 \\
& x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{llcl}
\text{Maximiser} & 3x_1 + x_2 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & \\
& x_1 - x_2 & \leq & -1 \\
& -x_1 - x_2 & \leq & -3 \\
& 2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\
& x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{llcl}
\text{Maximiser} & 3x_1 + x_2 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & \\
& x_1 - x_2 & \leq & -1 \\
& -x_1 - x_2 & \leq & -3 \\
& 2x_1 - x_2 & \leq & 2 \\
& x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Exercice 6.12 Utiliser la méthode du simplexe pour décrire *toutes* les solutions optimales du PL suivant :

$$\begin{array}{llcl}
\text{Maximiser} & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 & & \\
\text{Sous les contraintes :} & & & \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 & \leq & 5 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 & \leq & 3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$