PREUVE de la CORRECTION de l'algorithme de détection de terminaison de Mattern, dit des "4 compteurs"

Thm : soit E_i (resp. R_i) le nombre total de messages émis (resp. reçus) par l'ensemble des processus, calculés lors d'une vague i

Si $E_1 = R_1 = E_2 = R_2$ alors l'algorithme est terminé.

Mécanisme de la preuve : on cherche à établir une propriété sur l'ensemble des processus à un instant réel t. Mais, on ne peut pas garantir que tous les processus sont observés à cet instant t. On va montrer, à l'aide d'observations approximatives (par opposition à des observations faites au même instant sur chaque processus) qu'il existe forcément un instant réel t où la propriété (ici, celle de terminaison) était vérifiée.

Preuve :

On utilise des valeurs du temps, qui sont des valeurs dans le temps absolu (réel)

d_1 : instant où la vague 1 débute

f_1 : instant où la vague 1 termine

idem pour d_2, f_2 (pour vague 2)

On a, dans le temps absolu :

$$d_1 < f_1 < d_2 < f_2$$

Propriété 1 : pour tout processus P_i,

$$e_i(t_1) \leq e_i(t_2)$$

($e_i(t_1)$ = nombre de messages émis par P_i jusqu'à l'instant t_1)

et

$$r_i(t_1) \leq r_i(t_2)$$

$\forall\ t_1 \leq t_2$.

Propriété 2 : Pour un observateur ayant la capacité d'observer tous les processus en même temps (cf. "Dieu")

$$E(t_1) \leq E(t_2)$$

où $E(t_1)$ est le nombre total de messages émis sur tous les processus jusqu'à l'instant t_1

et

$$R(t_1) \leq R(t_2)$$

$\forall\ t_1 \leq t_2$

NB : aucun mécanisme "terrestre" ne nous permet de déterminer $E(t_1)$, $R(t_1)$

Propriété 3

$$R(t) \leq E(t) \quad \forall\ t$$

"Le nombre total de messages reçus à un instant absolu t est $\leq$ au nombre total de messages émis à ce même instant t"

Propriété 4

Notons R_1 le nombre total de messages reçus, ce nombre R_1 ayant été collecté par la 1ère vague. La collecte a donc eu lieu avant l'instant f_1

on a $\quad R1 \leq R(f_1)$

Propriété 5

De façon analogue

$$E(d_2) \leq E_2$$

E_2 comptabilise au moins autant d'émissions de messages que ce qu'il y en avait eu à l'instant d_2

Ainsi,

Si $\underline{R_1 = E_2}$ cela implique $\underline{E(d_2) \leq R(f_1)}$

puisque d'après (P5) $E(d_2) \leq E_2$
(P4) $R_1 \leq R(f_1)$

D'après (P2), on a $E(f_1) \leq E(d_2)$

donc, comme $E(d_2) \leq R(f_1)$
on a $\underline{E(f_1) \leq R(f_1)}$

D'après (P3), on a $\underline{R(f_1) \leq E(f_1)}$

Donc $\boxed{E(f_1) = R(f_1)}$

Conclusion : Lorsque $E_1 = \underbrace{R_1 = E_2} = R_2$
on vient de déduire $E(f_1) = R(f_1)$.
Cela signifiait donc qu'à la fin de la première vague, il n'y avait plus de message en transit c'est-à-dire que l'algorithme avait terminé.

Rem : il faut donc au plus 2 vagues après la terminaison pour la détecter