Théorème : L'algorithme de Chang et Roberts nécessite seulement $O(N . \log N)$ passages de messages en moyenne, sur tous les arrangements de numéros sur l'anneau

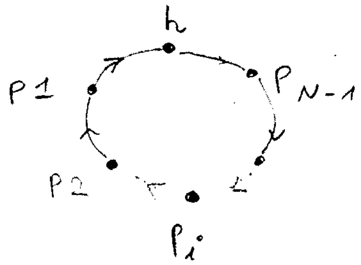
— Or suppose que tous se réveillent spontanément —

Preuve : Calculer le nombre moyen de passages de messages parmi les arrangements circulaires de N noms (numéros)

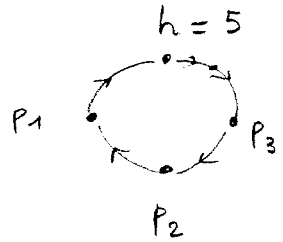
Soit N : cardinal d'un ensemble de N noms

h : le nom le plus grand

Il y a $(N-1)!$ arrangements circulaires des noms (en fixant h)



P_i est un nom qui se trouve à une distance i de h sur l'anneau



Noms = {1, 2, 4, 5}

Les arrangements en fixant h = 5

5	1	2	4
5	1	4	2
5	2	1	4
5	2	4	1
5	4	1	2
5	4	2	1

P2

Pour connaître le nombre total de passages de messages, on calcule d'abord le nombre total de passages d'un message portant la valeur p_i sur tous les arrangements
Il restera à faire la somme sur i

- Un message portant la valeur h $<h>$ est passé N fois dans chaque arrangement donc <u>au total $N(N-1)!$ fois</u>

- Un message portant la valeur p_i $<p_i>$ est passé <u>au plus</u> i fois puisqu'il ne sera pas retransmis à son arrivée au noeud de nom h (ceci pour un arrangement donné)

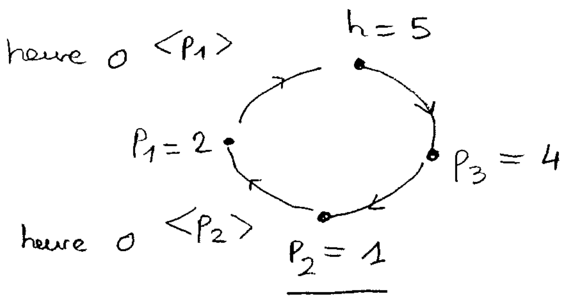
→ Soit $A_{i,k}$ le nombre d'arrangements cycliques où $<p_i>$ est transmis <u>exactement</u> k fois

→ Nombre total de fois où $<p_i>$ est transmis sur tous les arrangements possibles est donc =

$$\sum_{k=1}^{i} (k \times A_{i,k})$$

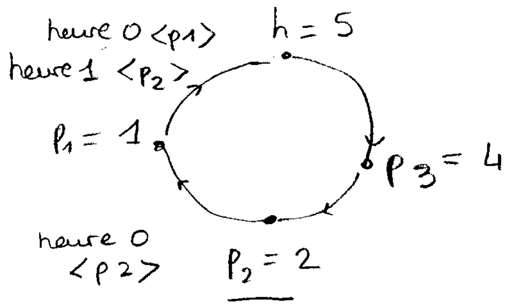
- pour chaque arrangement $A_{i,1}$, $<p_i>$ est transmis 1 fois
⋮
- pour chaque arrangement $A_{i,i}$ $<p_i>$ est transmis i fois

exemples : $i = 2$



C'est un des arrangements $A_{i,1}$

p_2 est passé 1 fois



C'est un des arrangements $A_{i,i}$

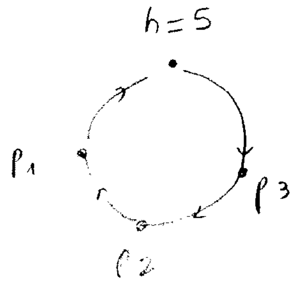
p_2 est passé 2 fois

- $\langle p_i \rangle$ est transmis exactement i fois si p_i est le plus grand nom parmi $p_1, \dots, p_i$

Ceci est le cas dans $\frac{(N-1)!}{i}$ des $(N-1)!$ arrangements $\neq$.

exemple :

h	p_3	$p_i = 2$	p_1	
5	1	2	4	
5	1	4	2	×
5	2	1	4	
5	2	4	1	×
5	4	1	2	
5	4	2	1	×

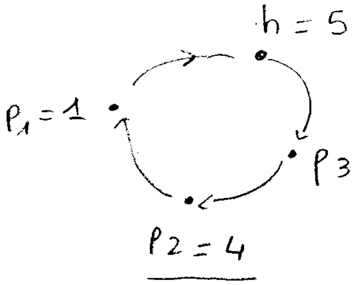


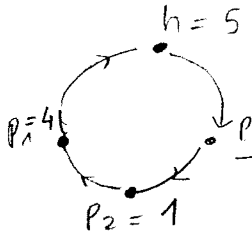
$A_{2,2} = 3$

Donc $\boxed{A_{i,i} = \frac{1}{i}(N-1)!}$

- $\langle p_i \rangle$ est transmis au <u>moins</u> k fois ($k \le i$) si p_i est suivi par $k-1$ noms plus petits que p_i

ex :





$p_3 = 2$ transmis au moins 2 fois car il est suivi d'un nom plus petit

Le nombre d'arrangements dans lesquels p_i est le plus grand des k noms

$$p_{i-(k-1)},\ p_{i-(k-2)},\ ----,\ p_i$$

est $\frac{1}{k}\cdot(N-1)!$

- $\langle p_i \rangle$ est transmis <u>exactement</u> k fois ($k < i$) s'il passe au moins k fois mais pas plus c.a.d. il ne passe pas au moins $(k+1)$ fois

Donc $A_{i,k} = \frac{(N-1)!}{k} - \frac{(N-1)!}{k+1}$

$$\boxed{A_{i,k} = \frac{1}{k(k+1)}(N-1)! \quad \text{pour } k < i}$$

$$\sum_{k=1}^{i} \left(k \cdot A_{i,k}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} \cancel{k}\left(\frac{1}{\cancel{k}(k+1)} \cdot (N-1)!\right) + \cancel{i} \times \frac{1}{\cancel{i}} (N-1)! =$$

$$\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{k+1}}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{i}} + \underbrace{1}_{\frac{1}{1}}\right)(N-1)! =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k}\right)(N-1)! = H_i \cdot (N-1)!$$

$i^{\text{ème}}$ nombre harmonique

- <u>Nombre total de transmissions (exclu <h>)</u> sur tous les arrangements =

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left(H_i \cdot (N-1)!\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{m} H_i = (m+1) H_m - m$$

$$\left[N \cdot H_{N-1} - (N-1)\right] \times (N-1)!$$

→ on rajoute les $N\,(N-1)!$ transmissions de <h>

$$\left[N \cdot H_{N-1} - (N-1) + N\right](N-1)! =$$

$$\left(N \cdot H_{N-1} + 1\right)(N-1)!$$

$N \times H_{N-1} + 1 =$

$N \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N-1} \right) + 1 =$

$\frac{N}{1} + \frac{N}{2} + \dots + \frac{N}{N-1} + \frac{N}{N} = N \times H_N$

→ Donc au total, sur tous les arrangements $(N \cdot H_N)(N-1)!$

→ Donc en <u>moyenne</u>, pour un arrangement le nombre de transmissions de messages est $N \cdot H_N$

Comme $H_N \approx \log N$

on a $\boxed{O(N \cdot \log N)}$

<u>cqfd</u>