TE sur la Logique Linéaire

Céline Espenel Nicolas Julien

Juin 2004

Table des matières

1 Présentation

1.1 La logique

La logique est une discipline âgée d'au moins deux mille ans, associée dès ses débuts à la grammaire, elle a beaucoup évoluée durant le siècle dernier. Dès la fin du 19e siècle elle s'est mathématisée, lors de la crise des fondements des mathématiques, et depuis le milieu de ce siècle l'éclosion de l'informatique lui a fournit un domaine privilégié d'application, assez distinct des mathématiques.
La logique est traditionnellement définie comme l'étude des principes valides de raisonnement, et de la vérité . Par conséquent elle traite aussi du langage qui exprime les énoncés qu'elle manipule et met en rapport. Elle peut être vue comme universelle ou comme un calcul. Selon la première vision, rien ne saurait exister ou s'exprimer en dehors de la logique, tandis que suivant la seconde, on peut envisager divers mondes où interpréter les énoncés logiques et où calculer leur vérité .

1.2 L'informatique et la logique

Dans les années 1980 l'informatique devient accessible à un large public. C'est le commencement des interfaces, des logiciels , des calculs, des interblocages etc L'informatique a besoin de nouveau outils pour la problèmes de gestions des processus, des ressources. Elle a besoin de vérifications d'automates, de preuves .
L'informatique est pour la logique une source de renouveau, y compris dans ses thèmes : la notion de calcul est maintenant centrale en logique. Plus encore que dans le cas de la logique intuitionniste, les démonstrations jouent un rôle central, et c'est plutôt à leur niveau qu'on retrouvera cette distinction :
- langage de spécification de processus
- démonstrations qui sont vues comme des processus, et le mécanisme de calcul est alors interne à la logique

1.3 La logique linéaire

La logique linéaire, introduite par Jean-Yves Girard ven 1986, est tout à la fois une branche de la théorie de la démonstration classique et une théorie mathématique de certains aspects de l'informatique. Le plus souvent, les problèmes informatiques abordés par la logique linéaire sont l'évaluation des langages fonctionnels avec partage de calculs, ou la programmation logique et la modélisation de la concurrence.
Percue comme un calcul relatif, la logique linéaire est utilisée comme un langage de

spécification de processus. Lorsque la logique linéaire est percue comme le langage des processus, ce sont les démonstrations elles-mêmes qui sont vues comme des processus, et le mécanisme de calcul est alors interne à la logique : l'élimination des coupures. Cette vision est issue de la correspondance entre démonstrations en logique intuitionniste et programmes fonctionnels. Selon cette approche, les démonstrations sont elles-mêmes des programmes à évaluer.
La logique linéaire répond à 2 ambitions :
- elle est constructive (toute preuve d'une formule passe forcément par le calcul d'un exemple) tout en possédant le principe du tiers exclus.
- elle intègre une notion de ressource : un fait validé n'est pas utilisable un nombre arbitraire de fois.

2 Définition syntaxique et sémantique déductive

2.1 Grammaire de la logique linéaire propositionnelle : LL0

Les formules en LL0 sont des phrases reconnues par la grammaire suivante :

$F -> \ F \otimes F$ (tensoriel)
$| \ F\&F$ (avec)
$| \ F \parr F$ (parallèle)
$| \ F \oplus F$ (plus)
$| \ !F$ (bien sûr)
$| \ ?F$ (pourquoi pas)
$| \ F^{\perp}$
$| \ (F)$
$| \ A$

A représente un symbole de variable

La négation linéaire est définie de manière inductive à l'aide des règles suivantes :
On note : $(A)^{\perp} := A^{\perp}$ et $(A^{\perp})^{\perp} := A$ (variable)
On note $(A \otimes B)^{\perp} := A^{\perp} \parr B^{\perp}$ (tensoriel)
On note $(A\&B)^{\perp} := A^{\perp} \oplus B^{\perp}$ (avec)
On note $(A \parr B)^{\perp} := A^{\perp} \otimes B^{\perp}$ (parallèle)
On note $(A \oplus B)^{\perp} := A^{\perp}\&B^{\perp}$ (plus)
On note $(!A)^{\perp} :=?(A^{\perp})$ (bien sûr)
On note $(?A)^{\perp} :=!(A^{\perp})$ (pourquoi pas)

Cette définition garantit donc l'involutivité de LL0.

On définit l'implication linéaire $A \multimap B$ comme une notation pour $A^{\perp} \parr B$.

On peut définir aussi les éléments neutres 1, $\top$, $\perp$ et 0 respectivement des connecteurs $\otimes$, $\&$, $\parr$ et $\oplus$.

2.2 Règles de déduction

En logique classique, le sens du séquent $A_1, ..., A_n \vdash B_1, ..., B_n$ signifie que les B_i sont des conséquences de la conjonction des A_i. En logique linéaire, il signifie que en comsonnant exactement tout les A_i, alors on a en parallèle tous les B_i. La notion de ressource implique trivialement l'impossibilité, à priori, d'avoir les règles structurelles de contraction et d'appauvrissement.

2.2.1 Axiome

Une des ambitions de la logique linéaire est l'involutivité c'est à dire $(A^{\perp})^{\perp}$ est équivalent à A, qui est donnée par la définition de la négation. On à donc tout naturellement la règle suivante :

$$\frac{}{\vdash A^{\perp}, A}$$

2.2.2 Conjonction multiplicative $\otimes$ (tensoriel)

Cette conjonction peut s'interpréter comme celle de la logique classique avec en plus la notion de ressource. Si on peut obtenir A en consommant le multi ensemble de ressources Γ, et B en consommant Δ, alors on obtient $A \otimes B$ en consommant Γ et Δ.

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}$$

ex : si je peux avoir un pain au chocolat ou un croissant avec 1euro alors il me faut 2* 1euro pour les deux.

2.2.3 Conjonction addititive & (avec)

Cette conjonction symbolise le fait que les ressources que l'on possèdent permettre de valider n'importe lequelle des 2 termes de la conjonction mais pas ensemble.

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B}$$

ex : si je peux avoir un pain au chocolat ou un croissant avec 1euro alors avec 1euro je peux avoir n'importe lequel des deux mais un seul.

2.2.4 Disjonction addititive $\oplus$ (plus)

Cette disjonction a le même sens que celle de la logique classique avec la notion de ressource.

$$\frac{\Gamma\vdash A}{\Gamma\vdash A\oplus B}$$

$$\frac{\Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\oplus B}$$

2.2.5 Disjonction multiplicative $\parr$ (parallèle)

Ce connecteur est certes celui dont le sens est le moins intuitif. On peut essayer de l'appréhender en se référant à son dual : $\otimes$. En fait on dirait une sorte de $\otimes$ mais où on a pas l'assurance que les deux termes sont prouvables indépendamment.

$$\frac{\Gamma\vdash A,B}{\Gamma\vdash A\parr B}$$

2.2.6 Exponentielles : ! (bien sûr), ? (pourquoi pas)

Le connecteur ! permet d'affirmer une formule un nombre arbitraire de fois et lui donner donc le meme sens qu'en logique classique. Le connecteur ? en tant que dual de ! doit avoir un sens relativement proche mais non intuitif et qu'on ne saurait pour le moment vous expliciter. Grâce à ces 2 connecteurs les règles structurelles de contraction et d'appauvrissement qui n'étaient plus valables sont de nouveau possibles.

On s'appercoit que tous les connecteurs duaux ont un sens très proche. Si on se considère dans un dialogue, la différence entre chacun peut etre vue comme qui à la possibilité de faire des choix.

2.3 Exemple de preuve

Nous allons montrer l'associativité de $\otimes$.

Preuve de $F \otimes (G \otimes H) \multimap (F \otimes G) \otimes H$
$F\otimes(G\otimes H) \multimap (F\otimes G)\otimes H = (F\otimes(G\otimes H))^{\perp} \parr ((F\otimes G)\otimes H) = (F^{\perp}\parr(G^{\perp}\parr H^{\perp})) \parr ((F\otimes G) \otimes H)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash F,\ F^{\perp}$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash G,\ G^{\perp}$}
\BinaryInfC{$\vdash F \otimes G,\ F^{\perp},\ G^{\perp}$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash H,\ H^{\perp}$}
\BinaryInfC{$\vdash (F \otimes G) \otimes H,\ F^{\perp},\ G^{\perp},\ H^{\perp}$}
\UnaryInfC{$\vdash (F \otimes G) \otimes H,\ F^{\perp},\ G^{\perp} \parr H^{\perp}$}
\UnaryInfC{$\vdash (F \otimes G) \otimes H,\ F^{\perp} \parr (G^{\perp} \parr H^{\perp})$}
\UnaryInfC{$\vdash F^{\perp} \parr (G^{\perp} \parr H^{\perp}),\ (F \otimes G) \otimes H$}
\UnaryInfC{$\vdash (F^{\perp} \parr (G^{\perp} \parr H^{\perp})) \parr ((F \otimes G) \otimes H)$}
\end{prooftree}
$$

Preuve de $(F \otimes G) \otimes H \multimap F \otimes (G \otimes H)$
$(F \otimes G) \otimes H \multimap F \otimes (G \otimes H) = ((F \otimes G) \otimes H)^{\perp} \parr (F \otimes (G \otimes H)) = ((F^{\perp} \parr G^{\perp}) \parr H^{\perp}) \parr (F \otimes (G \otimes H))$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash F,\ F^{\perp}$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash G,\ G^{\perp}$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash H,\ H^{\perp}$}
\BinaryInfC{$\vdash G \otimes H,\ H^{\perp},\ G^{\perp}$}
\BinaryInfC{$\vdash F \otimes (G \otimes H),\ H^{\perp},\ F^{\perp},\ G^{\perp}$}
\UnaryInfC{$\vdash F \otimes (G \otimes H),\ H^{\perp},\ F^{\perp} \parr G^{\perp}$}
\UnaryInfC{$\vdash F \otimes (G \otimes H),\ F^{\perp} \parr G^{\perp},\ H^{\perp}$}
\UnaryInfC{$\vdash F \otimes (G \otimes H),\ (F^{\perp} \parr G^{\perp}) \parr H^{\perp}$}
\UnaryInfC{$\vdash (F^{\perp} \parr G^{\perp}) \parr H^{\perp},\ F \otimes (G \otimes H)$}
\UnaryInfC{$\vdash ((F^{\perp} \parr G^{\perp}) \parr H^{\perp}) \parr (F \otimes (G \otimes H))$}
\end{prooftree}
$$

3 Vers une interprétation computationnelle

La logique linéaire se prete à des interprétations adaptées à différents champs de l'informatique (et ce n'est peut etre pas par hasard). En effet, on peut intuitivement avoir envie d'interpréter les variables par des processus, les connecteurs par la sequentialisation ou la parralellisation de processus...
Malheureusement nous n'avons pas encore eu le temps de nous faire une véritable idée, et des points restent obscurs. Nous espérons pouvoir combler cette lacune d'ici la soutenance.

Bibliographie

Jean-Yves GIRARD Linear logic : its syntax and semantics

A.LECOMTE Grammaire et theorie de la preuve une introduction

Andreas BLASS Is game Semantic necessary

Marco BOZZANO A logic-based approach to model checking of parameterized and infinite-state Systems

Christian RETORE Logique linéaire et syntaxe de langues

Pierre ABBRUGIATI La logique linéaire comme un jeu d'équipe

...et d'ailleurs un grand merci à l'illustre futur docteur Pierre Abbrugiati actuellement en DEA de mathématiques de l'informatique qui nous a beaucoup aidé à appréhender le sens de la logique linéaire.